Plan de trabajo

Martín Reiris Ithurralde

Detallo a continuación el plan de trabajo estimado a dos años de duración.

I. Tareas académicas - Comprende las tareas académicas usuales de un docente Universitario grado 4. Dictado de cursos de grado y posgrado. Formación y seguimiento de estudiantes de la licenciatura y de posgrado. Diseño de cursos, examenes y de material relacionado a ellos. Participación activa en tareas administrativas relacionadas al departamento de Matemática. Divulgación académica.

II. Seminarios - Dependiendo de la disponibilidad de interesados, quisiera proponer la realización de un seminario semanal en tópicos básicos y avanzados de Geometría Diferencial y Física Teórica. Algunos de los tópicos que me son familiares y que podrían estudiarse serían:

1. *Teoría de las Superficies Mínimas y aplicaciones* - Problema de Plateau clásico; Teorema de Allard y regularidad; Varifolds y teoría geométrica de la medida. Aplicaciones a Relatividad General.
2. *Flujos geométricos y aplicaciones* - Flujo de Ricci y flujos emparentados; Flujo de curvatura media y de curvatura media inversa. Aplicaciones a superficies mínimas y a Relatividad General.
3. *Tópicos modernos en Geometría Riemaniana y Geometría Diferencial* - Comparación geométrica; Convergencia y colapso de variedades Riemannianas (Cheeger-Gromov); Curvatura escalar e invariante de Yamabe; Geometrización y teoría de Thurston; Ricci Flow y la teoría de Hamilton-Perelman.
4. *Tópicos en Relatividad General y problemas matemáticos relacionados* - Problema de valores iniciales y el problema de la regularidad mínima; Estabilidad de agujeros negros; Soluciones cosmológicas y la evolución asintótica en el tiempo; Desigualdades geométricas de agujeros negros; Soluciones estáticas y estacionarias.

Todos ellos son tópicos con una importante actividad actual internacional.

III. Dictado de cursos avanzados (tópicos) - Dependiendo del número de interesados me gustaría proponer uno o más cursos de posgrado en *tópicos modernos en Geometria Differencial y Riemanniana* o en *tópicos modernos en Relatividad General Matemática* con una temática que podría incluir a la detallada en el ítem **II** anterior. En este sentido sería útil vincular el curso de tópicos y el seminario, haciendo de este un espacio paralelo de discusión.

IV. Investigación - Tanto la *Geometría Diferencial y Riemanniana en dimensión tres* como la *Matemática de la Relatividad General* (RG de ahora en más) son dos intersantes áreas que han mostrado notables desarrollos en las últimas décadas. A continuación describo solamente algunos de esos desarrollos desde la perspectiva de mi formación (ver más extensamente el review [Chruściel et al., 2010]). En primer lugar la celebrada *desigualdad de Penrose Riemanniana*[1], conjecturada por Penrose [Penrose., 1973] con argumentos clásicos en RG y probada en [Huisken and Ilmanen, 2001] y en [Bray, 2001], consolidó el uso de flujos geométricos (como el de curvatura media inversa) y de superficies mínimas como técnicas formidables en el estudio de la estructura de la RG. Décadas antes Schoen y Yau habían demostrado la *positividad de la masa* usando también técnicas en superficies mínimas [Schoen and Yau, 1979]. Apreciado en su totalidad, el caso de la desigualdad de Penrose es relevante ya que confirma la influencia de la reflexión física sobre la intuición geométrica, algo que ya había ocurrido en 1980' cuando se resolvía el problema de Yamabe. Paralelamente, la *desigualdad de Penrose Lorentziana*, que as aun un problema abierto, sigue bajo investigación [Bray and Chruściel, 2004] y ha disparado el estudio de nuevos flujos geométicos emparentados al de curvatura media inversa, [Bray and Khuri, 2011]. El estudio de esta desigualdad estimuló a su vez el análisis de equivalentes a superficies mínimas en geometría Lorentziana, como las *Superficies Marginalmente Atrapadas*[2], su estabilidad y su regularidad [Andersson et al., 2011].

La desigualdad de Penrose pertenece de hecho a una clase más amplia de desigualdades con un significado físico relevante y con características similares a las desigualdades isoperimétricas. Ejemplos de ello son la desgualdad Masa-MomentoAngular probada por Dain [Dain, 2008], o la desigualdad Area-MomentoAngular para agujeros negros axisimétricos [Dain and Reiris, 2011a], (ver también [Jaramillo et al., 2011]). Esta última ha sido necesaria para la prueba de la inexistencia de sistemas axisimétricos con dos agujeros negros en equilibrio, [Neugebauer and Hennig, 2009], [Chrusciel et al., 2011]. También ha sido usada en [Reiris, 2015a] donde se demostró la inestabilidad de la soluciones de agujeros negros de Kerr-Newman extremales[3]. Todos estos desarrollos convalidan también la importancia de los mapas armónicos en problemas de minimización relacionados a área o masa, muy similar al la estrategia original de Douglas al problema de Plateau, [Douglas, 1931].

En relación a la unicidad de agujeros negros en dimensión 3+1 han habido interesantes desarrollos técnicos [Alexakis et al., 2010] que combinan técnicas geométricas y de PDE, principalmente con estimaciones de Carleman, en un esfuerzo por remover la indeseada hipótesis de analiticidad de Hawking en su ya celebrada unicidad de la solución de Kerr,

[1]La desigualdad de Penrose Riemanniana aserta que una variedad Riemanniana (de dimensión tres), de curvatura escalar no negativa, asintóticamente plana y de borde minimal (y outer-minimizing) satisface la desigualdad $A \leq 16\pi m^2$, donde A es el área del borde y m es la masa (ADM). La desigualdad se interpreta usualmente como una cota superior para la el área de un agujero negro (o varios) en término de la masa total. La igualdad se alcanza solamente en la solución de agujero negro de Schwarzschild.

[2]En términos simples, una superficie marginalmente atrapada representa una 'localización' del horizonte de eventos de un agujero negro.

[3]La familia de soluciones de Kerr, o agujeros negros de Kerr, representan a agujeros negros en rotación a excepción de la solución de Schwarzschild, que es un miembro de la familia de Kerr, y que representa un agujero negro estático y sin momento angular. La familia de Kerr-Newman representan agujeros negros cargados y en rotación, a excepción nuevamente de la solución de Schwarzschild-Newman que es estática. Un agujero negro de Kerr extremal tiene rotación máxima. Una agujero negro de Kerr-Newman extremal tiene una combinación máxima de momento angular y carga.

[Hawking and Ellis, 1973]. Adicionalmente, han habido importantes contribuciones a la estabilidad del espacio de Minkowski [Lindblad and Rodnianski, 2010] y el efecto-memoria [Bieri et al., 2011] que deberían impactar en algún momento sobre la física de la ondas gravitacionales. El estudio de la estabilidad lineal de la solución de Kerr ha acaparado también atención en los últimos años. Finalmente, es necesario destacar el trabajo de Christodoulou [Christodoulou, 2011] en el problema de la formación de agujeros negros por la focalización de ondas gravitacionales, aun por impactar en el campo de la física.

En el área de la Geometría Diferencial y Riemanniana es inevitable destacar, por su espectacularidad y derivaciones, la prueba de Perelman de la Conjectura de Geometrización de Thurston usando el flujo de Ricci (ver [Morgan and Tian, 2006]). El trabajo, que representa en sí un hito en la historia de la Geometría Riemanniana y la topología, tiene importantes derivaciones también en RG. Moncrief y Fischer [Fischer and Moncrief, 2000], Anderson [Anderson, 2004] y Reiris [Reiris, 2010], han estudiado la geometrización en el flujo de Einstein (estos es las ecuaciones de Einstein vistas como un flujo sobre una variedad tridimensional). Por otro lado, usando fundamentalmente el Ricci flow, Marques [Marques, 2012] probó que el espacio modular de metricas de curvatura escalar positiva es conexo, un resultado con interesantes derivaciones en el estudio de la geometría de los estados iniciales en RG. También en [Reiris, 2009a] se ha dado una prueba diferente a la de Schoen-Yau y de Witten de la positividad de la masa, usando la geometrización de Thurston. Finalmente, técnicas de comparación geométrica á la Backry-Emery, introducidas por Perelman principalmente para el estudio de solitones, han tenido también interesantes aplicaciones en el estudio de las soluciones estáticas (que son 'solitones' en RG), [Case, 2010], [Reiris, 2015b].

A continuación describo brevemente cuatro 'programas' que sería interesante tener como una guia de investigación para los próximos dos años. Estos propuestas están vinculados a los desarrollos descritos enteriormente y abarcan una variedad de temas intervinculados en Geometría Diferencial, Ecuaciones en Derivadas Parciales (PDE) y la Matemática de la Relatividad General.

(a) Clasificacón de soluciones estáticas en el vacío y sin hipótesis topológicas ni asintóticas - Desde los comienzos de la RG las soluciones estáticas han desempeñado un rol fundamental. Ya en 1916, (solo meses después de que Einstein brindara las ecuaciones de la RG), Schwarzschild presentó una solución estática que entonces se interpretó como el campo gravitatorio de una masa puntual. Cincuenta años tomó aproximadamente interpretarla como el campo gravitatorio de un agujero negro y sesenta entender que es única dentro de la clase de soluciones estáticas asintoticamente planas [Israel, 1967]. Algunos años después de Schwarzschild, Levi-Civita y Kasner estudiaron soluciones estáticas con simetría $\mathbb{R}^2$ y su unicidad (ahora *soluciones de Kasner* y que contienen genéricamente singularidades). Más recientemente Korotkin y Nicolai [Korotkin and Nicolai, 1994] presentaron una solución de agujero negro estático con asintótica Kasner y en 2005 Anderson [Anderson, 2000] probó que toda solución estática y geodésicamente completa es necesariamente Minkowski. Lo que proponemos es demostrar que el espacio de Minkowski, el espacio de Schwarzschild y las soluciones de tipo[4] Korotkin-Nicolai son las únicas soluciones estáticas regulares (esto es, sin singularidades de curvatura y con horizontes, de existir, compactos). Dicho de otra manera, el proyecto consiste en clasificar las soluciones estáticas regulares, lo que incluiría en sí todas las configuraciones de agujero negro posibles. El proyecto es de hecho parte de un trabajo ya en curso y avanzado. La idea es usar la técnicas de comparación geométrica á la Backry-Emery desarrolladas en [Reiris, 2015b] y varios trabajos de Galloway para clasificar la topología. Una vez clasificada, la asintotica se estudia con técnicas de colapso de variedades Riemannianas (Cheeger-Gromov).

(b) Construcción de una solución cosmológica 'doble cusp' - El primer modelo cosmológico usando la RG fue propuesto por Einstein en 1917. Tuvo la audacia de proponer un 'principio cosmológico' y de introducir una constante cosmológica. El resultado es un universo invariante en el tiempo, isotrópico y homogéneo. Desde entonces el estudio de las soluciones cosmológicas, representen o no el universo actual, ha sido un tema central en RG y Geometría Lorentziana. Los modelos de Friedman-Lemaître son los más utilizados pero la diversidad de las soluciones cosmológicas es mucho mayor. Modelos con una, dos o más simetrías (en el vacío) han sido estudiados ampliamente, pero el conocimiento sobre soluciones (en el vacío) sin simetría alguna es mucho más escaso. La asintótica en el tiempo de la geometría espacial, es decir la 'forma final' del universo a escala cosmológica, ha sido estudiada pero bajo condiciones a priori en la curvatura [Fischer and Moncrief, 2000],[Anderson,],[Reiris, 2010]. En tales casos, la geometría espacial asintótica en el tiempo geometriza la tres variedad espacial (el espacio propiamente dicho) en el sentido de Thurston. Lo que no se conoce hasta ahora es la existencia de una solución cuyo asintótica no sea homogénea (una geometría homogénea es también una geométría pura de Thurston). El proyecto que proponemos es construir uns solución cuya asintótica temporal, que llamamos 'double cusp', consista en dos variedades hyperbólicas unidas por un cuello de sección toroidal y separandose la una de la otra uniformemente a medida que avanza el tiempo. El estudio de las soluciones 'double cusp' tiene antecedentes en [Anderson,] y en [Reiris, 2010]. Concretamente en [Reiris, 2010] se construyó una solución aproximada a un 'double cusp', y que satisface las ecuaciones de Einstein (en el vacío) a menos de un error que decrece en el tiempo exponencialmente. La idea es probar que dicha solución aproximada puede ser perturbada de manera de obtener una solución exacta con las mismas propiedades asintóticas. El trabajo posee una importante dificultad téctica pero es factible. La construcción del 'doble cusp' sería una importante contribución a la Matemática de la RG.

(c) Estudiar el colapso de tres variedades con curvatura escalar no negativa o acotada inferiormente - Un desafío formidable de la Matemática de la RG es predecir la ocurrencia de singularidades y su naturaleza. La tarea es formidable en parte porque las ecuaciones de Einstein poseen propiedades únicas no compartidas por otras ecuaciones más estudiadas y entendidas. En coordenadas apropiadas, las ecuaciones de Einstein son

[4] Es decir que tienen las mismas propiedades topológicas y asintóticas de las soluciones de Korotkin-Nicolai.

de naturaleza hyperbólica, (como las ecuación de ondas) y por ello para su análisis es necesario usar normas (o energías) integrales. Pero siendo a la vez una ecuación geométrica, se necesitan normas integrales en la curvatura (espacial). Una obstruccón básica en el análisis de la dinámica de las ecuaciones de Einstein y del análisis de las singularidades es que no se conocen técnicas completas para estudiar la geometría tridimensional (o espacial) de este modo. En general el estudio de la geometría en términos de normas integrales de curvatura es complejo y muy diverso. Sin embargo en RG, la geometría espacial tridimensional tiene la curvatura escalar acotada uniformemente por debajo. Esa sutil diferencia es crucial. Lo que proponemos concretamente es probar que, en dimensión tres, la geometría está completamente controlada por (i) la norma integral de la curvatura, (ii) la cota inferior de la curvatura escalar, y (iii) por el diámetro de la variedad. Aunque parezca de naturaleza exclusivamente técnica, controlar la geometría en estos términos sería en sí un progreso importante, como ha sido esbozado y elaborado en [Reiris, 2009b]. Este es también un trabajo en curso.

(d) Estudiar el problema de la estabilidad lineal de la solución de Kerr y de Kerr extremo - El análisis de la estabilidad de las soluciones de agujeros negros de Kerr es uno de los temas más activos actualmente en RG. En relacón a esto, Sergio Dain (colega mío de la Universidad Nacional de Córdoba - Argentina) y su estudiante Ivan Gentile, han encontrado recientemente un conjunto interesante de energías (normas) conservadas en la linearización axisimétrica de las ecuaciones de Einstein al rededor de la solución de Kerr [Dain and Gentile de Austria, 2014],[Dain and Gentile de Austria, 2015]. Brevemente, quisiera comentar que un posible proyecto conjunto, (pero tentativo aun), con mi colega Sergio Dain consistiría en explotar dichas energías para probar la estabilidad lineal de la solución de Kerr. Ambos tenemos un trabajo previo emparentado [Dain and Reiris, 2011b].

Bibliogrfía

[Alexakis et al., 2010] Alexakis, S., Ionescu, A. D., and Klainerman, S. (2010). Hawking's local rigidity theorem without analyticity. *Geom. Funct. Anal.*, 20(4):845–869.

[Anderson, 2000] Anderson, M. T. (2000). On stationary vacuum solutions to the Einstein equations. *Ann. Henri Poincaré*, 1(5):977–994.

[Anderson, 2004] Anderson, M. T. (2004). Asymptotic behavior of future complete cosmological space-times. *Class. Quant. Grav.*, 21:S11–S28.

[Anderson,] Anderson, T. M. On long-time evolution in general relativity and geometrization of 3-manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 222(3):533–567.

[Andersson et al., 2011] Andersson, L., Eichmair, M., and Metzger, J. (2011). Jang's equation and its applications to marginally trapped surfaces. In *Complex analysis and dynamical systems IV. Part 2*, volume 554 of *Contemp. Math.*, pages 13–45. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[Bieri et al., 2011] Bieri, L., Chen, P., and Yau, S.-T. (2011). Null asymptotics of solutions of the Einstein-Maxwell equations in general relativity and gravitational radiation. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 15(4):1085–1113.

[Bray, 2001] Bray, H. L. (2001). Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. *J. Differential Geom.*, 59(2):177–267.

[Bray and Chruściel, 2004] Bray, H. L. and Chruściel, P. T. (2004). The Penrose inequality. In *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, pages 39–70. Birkhäuser, Basel.

[Bray and Khuri, 2011] Bray, H. L. and Khuri, M. A. (2011). P.D.E.'s which imply the Penrose conjecture. *Asian J. Math.*, 15(4):557–610.

[Case, 2010] Case, J. S. (2010). The nonexistence of quasi-Einstein metrics. *Pacific J. Math.*, 248(2):277–284.

[Christodoulou, 2011] Christodoulou, D. (2011). The formation of black holes in general relativity. In *Geometry and analysis. No. 1*, volume 17 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 247–283. Int. Press, Somerville, MA.

[Chrusciel et al., 2011] Chrusciel, P. T., Eckstein, M., Nguyen, L., and Szybka, S. J. (2011). Existence of singularities in two-Kerr black holes. *Class. Quant. Grav.*, 28:245017.

[Chruściel et al., 2010] Chruściel, P. T., Galloway, G. J., and Pollack, D. (2010). Mathematical general relativity: a sampler. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 47(4):567–638.

[Dain, 2008] Dain, S. (2008). Proof of the angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes. *J. Differential Geom.*, 79(1):33–67.

[Dain and Gentile de Austria, 2014] Dain, S. and Gentile de Austria, I. (2014). On the linear stability of the extreme Kerr black hole under axially symmetric perturbations. *Class. Quant. Grav.*, 31(19):195009.

[Dain and Gentile de Austria, 2015] Dain, S. and Gentile de Austria, I. (2015). Bounds for axially symmetric linear perturbations for the extreme Kerr black hole. *Class. Quant. Grav.*, 32(13):135010.

[Dain and Reiris, 2011a] Dain, S. and Reiris, M. (2011a). Area—angular-momentum inequality for axisymmetric black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 107:051101.

[Dain and Reiris, 2011b] Dain, S. and Reiris, M. (2011b). Linear perturbations for the vacuum axisymmetric Einstein equations. *Annales Henri Poincare*, 12:49–65.

[Douglas, 1931] Douglas, J. (1931). Solution of the problem of Plateau. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33(1):263–321.

[Fischer and Moncrief, 2000] Fischer, A. E. and Moncrief, V. (2000). Hamiltonian reduction, the Einstein flow, and collapse of 3-manifolds. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 88:83–102. [,83(2000)].

[Hawking and Ellis, 1973] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R. (1973). *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, London. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.

[Huisken and Ilmanen, 2001] Huisken, G. and Ilmanen, T. (2001). The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *J. Differential Geom.*, 59(3):353–437.

[Israel, 1967] Israel (1967). Event horizons in static vacuum space-times. *Phys. Review*, vol.164:5:1776–1779.

[Jaramillo et al., 2011] Jaramillo, J. L., Reiris, M., and Dain, S. (2011). Black hole area-angular-momentum inequality in nonvacuum spacetimes. *Physical Review Letters D*, 84(12):121503.

[Korotkin and Nicolai, 1994] Korotkin, D. and Nicolai, H. (1994). The Ernst equation on a Riemann surface. *Nucl. Phys.*, B429:229–254.

[Lindblad and Rodnianski, 2010] Lindblad, H. and Rodnianski, I. (2010). The global stability of Minkowski space-time in harmonic gauge. *Ann. of Math. (2)*, 171(3):1401–1477.

[Marques, 2012] Marques, F. C. (2012). Deforming three-manifolds with positive scalar curvature. *Ann. Math. (2)*, 176(2):815–863.

[Morgan and Tian, 2006] Morgan, J. W. and Tian, G. (2006). Ricci Flow and the Poincare Conjecture. *ArXiv Mathematics e-prints*.

[Neugebauer and Hennig, 2009] Neugebauer, G. and Hennig, J. (2009). Non-existence of stationary two-black-hole configurations. *Gen. Relativity Gravitation*, 41(9):2113–2130.

[Penrose., 1973] Penrose., R. (1973). Naked singularities. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 224:125–134.

[Reiris, 2009a] Reiris, M. (2009a). Energy and volume: A proof of the positivity of adm energy using the yamabe invariant of three-manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 287(1):383–393.

[Reiris, 2009b] Reiris, M. (2009b). Scalar curvature isoperimetric collapse and general relativity in the constant mean curvature gauge. *Contemporary Mathematics 554. Fourth international conference on Complex Analysis and Dynamical Systems. Nahariya Israel.*

[Reiris, 2010] Reiris, M. (2010). The ground state and the long-time evolution in the CMC Einstein flow. *Annales Henri Poincare*, 10:1559–1604.

[Reiris, 2015a] Reiris, M. (2015a). On Perturbations of Extreme KerrÐNewman Black Holes and their Evolution. *Annales Henri Poincare*, 16(7):1551–1581.

[Reiris, 2015b] Reiris, M. (2015b). The asymptotic of static isolated systems and a generalized uniqueness for Schwarzschild. *Class. Quant. Grav.*, 32(19):195001.

[Schoen and Yau, 1979] Schoen, R. and Yau, S. T. (1979). On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1):45–76.